

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

Краснодарский филиал Финуниверситета

Кафедра «Математика и информатика»

СОГЛАСОВАНО

Генеральный директор

ООО «Портал-Юг»

СОГЛАСОВАНО

ООО «Портал-Юг»

Генеральный директор



Е.В. Мостовой

«21» февраля 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ

Краснодарский филиал
Финуниверситета

Директор



Э.В.Соболев

«21» февраля 2023 г.

1

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА**

студентов, обучающихся по направлению подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

в соответствии с образовательными стандартами Финансового
университета

(программа подготовки бакалавров)

*Рекомендовано Ученым советом Краснодарского филиала Финуниверситета
(протокол № 12 от 20.02.2024)*

*Одобрено кафедрой «Математика и информатика»
(протокол № 13 от 27.02.2024)*

Краснодар 2024

УДК 519.220+368
ББК 22.17
А73

Рецензент: О.В. Коренева кандидат технических наук, доцент кафедры «Математика и информатика» Краснодарского филиала Финуниверситета.

Ануфриева А.П. Рабочая программа дисциплины актуарная математика для обучающихся по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика, профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах». – Краснодар: Краснодарский филиал Финуниверситета, кафедра «Математика и информатика», 2023 г.

Дисциплина Актуарная математика относится к модулю профиля по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика.

В рабочей программе дисциплины определены ее цель, требования к результатам освоения дисциплины, содержание программы, тематика аудиторных занятий, формы самостоятельной работы, оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации, учебно-методическое и информационное обеспечение.

Рабочая программа дисциплины актуарная математика

*Формат 60*90/16. Гарнитура Times New Roman*

Усл. п.л. 2,0. Изд. № _от.

Тираж 100 экз.

Заказ № .

Отпечатано в Краснодарском филиале Финуниверситета

Содержание

1.Наименование дисциплины	4
2.Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	4
3.Место дисциплины в структуре образовательных программ	5
4.Объем дисциплины в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	5
5.Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	6
5.1.Содержание дисциплины	6
5.2.Учебно-тематический план	9
5.3.Содержание семинаров, практических занятий	13
6.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	13
6.1.Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы	13
6.2.Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	14
7.Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости	16
8.Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по данной дисциплине	17
8.1.Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, знаний и умений	17
8.2.Примеры типовых контрольных заданий	17
8.3.Примерные вопросы для подготовки к экзамену	21
8.4.Пример экзаменационного билета	22
9.Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	23
10.Перечень ресурсов информационно телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	24
11.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	24
12.Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем	25
13.Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	25

1. Наименование дисциплины

Дисциплина «АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА»

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Дисциплина «Актuarная математика» обеспечивает формирование следующих компетенций: ПКП-3.

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (владения, умения и знания), соотнесенные с компетенциями/индикаторам и достижения компетенции
ПКП-3	Способность применять математический аппарат при разработке вычислительных алгоритмов для решения задач в области экономики и финансов	1. Демонстрирует знание принципов процесса структурирования для принятия финансово-экономических решений 2. Применяет инструментальные средства для преобразования данных и структурирования данных в рамках их предобработки для использования для анализа, прогнозов, принятия финансово-экономических решений. 3. Владеет практическим навыком инжиниринга признаков с	<u>Знать</u> принципы процесса структурирования <u>Уметь</u> применять принципы процесса структурирования для принятия финансово-экономических решений <u>Знать</u> инструментальные средства для преобразования данных <u>Уметь</u> применять инструментальные средства для преобразования данных структурирования данных в рамках их предобработки <u>Знать</u> признаки инжиниринга <u>Уметь</u> владеть практическим навыком инжиниринга

		<p>учетом структуры исходных данных и предметной области прикладной задачи.</p>	
--	--	---	--

3. Место дисциплины в структуре образовательных программ

Дисциплина «Актuariальная математика» относится к модулю профиля направления подготовки 01.03.02. «Прикладная математика и информатика» профиля «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах».

Дисциплина «Актuariальная математика» базируется на знаниях, полученных при изучении дисциплин «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Актuariальная статистика».

4. Объем дисциплины в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётные единицы. Вид промежуточной аттестации – экзамен.

Вид текущего контроля – контрольная работа.

Очная форма обучения

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 7 (в часах)
Общая трудоёмкость дисциплины	4 з/е, 144 ч.	144
Контактная работа - Аудиторные занятия	68	68
Лекции	34	34
Семинары, практические занятия	34	34
Самостоятельная работа	40	40
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен	Экзамен

Очно – заочная форма обучения

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 8 (в часах)
Общая трудоемкость дисциплины	4 з/е, 144 ч.	144
Контактная работа - Аудиторные занятия	34	34
Лекции	16	16
Семинары, практические занятия	18	18
Самостоятельная работа	110	110
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен	Экзамен

5.Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1.Содержание дисциплины

Базовые элементы актуарных моделей

1. Риск и его характеристики. Страховой риск и его оценка. Страховые операции и их модели.
2. Общие подходы к описанию риска. Основные типы моделей риска. Принятие решений в условиях неопределенности и риска. Теория полезности и страхование.
3. Модель ожидаемой полезности. Классы функций полезности. Меры Эрроу-Пратта в оценке риска. Понятие о рисковой премии.
4. Страховые события и потоки событий. Принципы оценивания и сравнения страховых событий и потоков.
5. Принцип актуарного баланса в анализе и моделировании страховых операций.

Оценивание детерминированных и стохастических потоков платежей

1. Модели процентного роста. Различные виды ставок и их эквивалентность.
2. Приведение потока платежей. Сравнение и эквивалентность потоков платежей в схеме сложных процентов.
3. Регулярные потоки платежей (ренды) и их стоимость.
4. Расчет параметров детерминированных страховых операций. Внутренние ставки потоков платежей.
5. Случайные потоки платежей и их оценивание.

6. Оценивание рент по случайным процентным ставкам.

Демографические модели страхования жизни и пенсионных систем

1. Продолжительность жизни и продолжительность оставшейся жизни как случайные величины. Плотность и моменты распределения продолжительности оставшейся жизни. Вероятности смерти и дожития. Интенсивность (сила) смертности.
2. Таблицы смертности, их разновидности. Понятие порядка вымирания, детерминированная и стохастическая модели смертности. Аппроксимация смертности для дробных возрастов. Аналитические законы смертности.
3. Модели выбытия по нескольким причинам. Модели выбытия нескольких взаимосвязанных лиц.
4. Понятие о демографических моделях и их параметрах. Сетка Лексиса и демографические совокупности. Реальное и условное поколения. Демографические параметры смертности и их оценивание.
5. Модели стационарного и стабильного населения в моделях страхования жизни и пенсионном страховании.
6. Актуарные проблемы моделирования социальных пенсионных систем.

Актуарные модели страхования жизни и пенсий

1. Основные принципы тарификации в страховании жизни: принцип эквивалентности, уравнение баланса. Понятие премиального базиса. Модели основных видов страхования жизни. Коммутационные функции.
Связь между непрерывными и дискретными видами страхования жизни.
2. Пожизненные ренты. Актуарная приведенная ценность, актуарное накопление, актуарный коэффициент дисконтирования. Расчет различных видов пожизненных рент. Пенсионные схемы.
3. Оценивание простейших страховых контрактов страхования жизни. Единовременные премии на дожитие. Единовременные премии на случай смерти. Периодические нетто-премии для основных видов страхования жизни. Полисы с возвратом премий.
4. Убыток страховщика по действующему полису. Понятие резервного базиса, его отличие от премиального базиса. Математический резерв и его виды. Перспективный и ретроспективный методы расчета резерва, условия их эквивалентности. Резерв нетто-премий для основных видов страхования жизни. Пенсионные резервы.

Модели индивидуального риска

1. Модели индивидуальных исков. Суммы независимых случайных исков.
2. Аппроксимация распределений совокупных исков нормальными распределениями. Примеры использования аппроксимации.

Модели коллективного риска для отдельного периода

1. Понятие коллективного риска. Распределение совокупных исков. Распределение числа исков и его аппроксимация.
2. Распределение суммы индивидуального иска и его аппроксимация. Свойства составного пуассоновского распределения.
3. Сходимость аппроксимаций распределения совокупных исков при большом числе исков.

Модели коллективного риска для последовательности периодов

1. Свободные резервы страховой компании. Процесс риска. Понятие о разорении.
2. Способы описания исковых процессов: модель непрерывного времени, модель дискретного времени. Максимальные совокупные потери.

Теория достоверности

1. Достоверность с ограниченной флуктуацией. Полная и частичная достоверность.
2. Сбалансированная модель Бюльмана.
3. Модель Бюльмана-Штрауба. Оценивание параметров в модели Бюльмана-Штрауба.

5.2. Учебно-тематический план

Очная форма обучения

№ п/п	Наименован ие тем (разделов) дисциплины	Трудоёмкость в часах					Формы текущего контроля успеваемо сти
		Всего	Аудиторная работа			Самостоя тельная рабо та	
			Общая, в т.ч.:	Лек ции	Семина ры, пра кти ческ ие заня тия		
1.	Базовые элементы актуарных моделей	16	6	2	2	5	Самостояте льные работы. Участие в решении задач на практическ их занятиях. Собеседова ния по домашним заданиям.
2.	Оценивание детерминиро ванных и стохастическ их поток ов платежей	22	12	4	4	2	
3.	Демографиче ские модели страхования жизни и пенсионных систем	15	8	6	6	3	
4	Актуарные модели страхования жизни и пенсий	13	8	6	6	5	
5	Модели индивидуаль ного риска	13	10	4	4	2	
6	Модели коллективног о риска для отдельного периода	25	4	4	4	3	
7	Модели коллективног о риска для последовател	24	8	4	4	10	

	ьности периодов						
8	Теория достоверност и	16	12	4	4	10	
В целом по дисциплине		144	68	34	34	40	Контрольн ая работа

Очно – заочная форма обучения

№ п / п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоёмкость в часах					Формы текущего контроля успеваемости
		Все го	Аудиторная работа			Самос тоя тельна я работа	
			Об ща я, в т.ч. :	Ле кц ии	Семи нары , прак тичес кие занят ия		
1	Базовые элементы актуарных моделей	16	5	2	3	10	Самостоятель ные работы. Участие в решении задач на практических занятиях. Собеседовани я по домашним заданиям.
2	Оценивание детерминированных и стохастических потоков платежей	22	5	2	2	10	
3	Демографические модели страхования жизни и пенсионных систем	15	2	2	3	20	
4	Актуарные модели страхования жизни и пенсий	13	2	2	2	10	
5	Модели индивидуального риска	13	1	2	2	10	
6	Модели коллективного риска для отдельного периода	25	5	2	2	10	
7	Модели коллективного риска для последовательности периодов	24	10	2	2	2	
8	Теория достоверности	16	4	2	2	2	

В целом по дисциплине	144	34	16	18	110	Контрольная работа
-----------------------	-----	----	----	----	-----	-----------------------

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8, 9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
Тема 1. Базовые элементы актуарных моделей	<p>Модели оценки рисков. Однопериодные и многопериодные модели. Рекомендуемые источники: п. 8,9 Модель Эрроу-Пратта. Функции полезности и меры риска</p>	<p>Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>
Тема 2. Оценивание детерминированных и стохастических потоков платежей	<p>Общая схема оценивания детерминированных потоков платежей. Оценка стоимостей рент по фиксированным и переменным ставкам Рекомендуемые источники: п. 8,9 Модели оценивания стохастических потоков платежей. Стохастические ренты с постоянными ставками. Рекомендуемые источники: п. 8,9 Модели оценивания случайных рент с фиксированными ставками. Рекомендуемые источники: п. 8,9 Модели оценивания детерминированных рент со случайными ставками. Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	<p>Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>
Тема 3. Демографические модели страхования жизни и пенсионных систем	<p>Общие модели дожития. Функция дожития и ее свойства. Оценка характеристик. Модели Муавра, Мейкема. Рекомендуемые источники: п. 8,9 Таблицы смертности их параметры и оценка. Селективные таблицы. Построение таблиц смертности. Расчеты с таблицами смертности. Рекомендуемые источники: п. 8,9 Многофакторные таблицы смертности и выбытия. Оценка факторов выбытия и расчет вероятностей сложных событий Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	<p>Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>
Тема 4. Актуарные модели страхования жизни и пенсий	<p>Модели страхования жизни. Расчет премий (взносов) по различным контрактам страхования жизни Рекомендуемые источники: п. 8,9 Модели страхования рент. Оценка стоимостей страховой ренты по моделям дожития и по таблицам смертности. Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	<p>Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений</p>

Тема 5. Модели индивидуального риска	<p>Модель индивидуального иска. Частота и тяжесть иска. Модель индивидуального риска. Оценка стоимости риска.</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p> <p>Аппроксимация распределений совокупных исков нормальными распределениями. Примеры использования аппроксимации. Оценка нетто-премии и рисковой надбавки.</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Тема 6. Модели коллективного риска для отдельного периода	<p>Распределение совокупных исков. Распределение числа исков и его аппроксимация. Распределение суммы индивидуального иска и его аппроксимация. Свойства составного пуассоновского распределения.</p> <p>Рекомендуемые источники: п. п. 8,9</p> <p>Сходимость аппроксимаций распределения совокупных исков при большом числе исков.</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Тема 7. Модели коллективного риска для последовательности и периодов	<p>Свободные резервы страховой компании. Процесс риска. Понятие о разорении.</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p> <p>Способы описания исковых процессов: модель непрерывного времени, модель дискретного времени. Максимальные совокупные потери.</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Тема 8. Теория достоверности	<p>Достоверность с ограниченной флуктуацией. Полная и частичная достоверность</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p> <p>Сбалансированная модель Бюльмана. Модель Бюльмана-Штрауба</p> <p>Рекомендуемые источники: п. 8,9</p>	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений

5.3.Содержание семинаров, практических занятий

6.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1.Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Тема 1. Базовые элементы актуарных моделей	Характеристики случайных величин. Производящие функции.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 2. Оценивание детерминированных и стохастических потоков платежей	Финансовые пенсионные схемы.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 3. Демографические модели страхования жизни и пенсионных систем	Пенсионные схемы с двумя декрементными факторами.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 4. Актуарные модели страхования жизни и пенсий	Модели страхования жизни, учитывающие расходы	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 5. Модели индивидуального риска	Договоры страхования с вычетом, лимитом и франшизой Методы оценки распределения суммарных убытков	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 6. Модели коллективного риска для отдельного периода	Модели числа исков из семейства (a, b, m) и формула Панджера	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 7. Модели коллективного риска для последовательности периодов	Дискретные случайные процессы с непрерывным временем. Основные свойства пуассоновского процесса	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.

Тема 8. Теория достоверности	Оценивание параметров в модели Бюльмана-Штрауба	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
------------------------------	---	--

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры заданий контрольной работы

- Доказать, что при любых $t, u \geq 0$
 ${}_{t+u}P_x = {}_tP_x \cdot {}_uP_{x+t} = {}_uP_x \cdot {}_tP_{x+u}$.
 Дать вероятностный смысл этих тождеств.
- Доказать, что при любых $t, u \geq 0$
 ${}_{t+u}q_x = 1 - (1 - {}_tq_x)(1 - {}_uq_{x+t}) = 1 - (1 - {}_uq_x)(1 - {}_tq_{x+u})$.
- Доказать, что для любого целого $n > 1$
 ${}_nP_x = P_x \cdot P_{x+1} \cdots P_{x+n-1}$.
 Дать вероятностный смысл этого тождества.
- Показать, что ${}_{t|u}q_x$ и ${}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$ совпадают. Дать вероятностный смысл этого тождества.
- Какой вероятностный смысл выражения ${}_{t+u}q_x - {}_uq_x$? Обосновать ответ.
- Какой вероятностный смысл выражения ${}_up_x - {}_{t+u}p_x$? Обосновать ответ.
- Доказать, что $\mathbf{P}(K(x) \geq k) = {}_kp_x$.
- Доказать формулу $S_T = \int_x^\infty f_T(y) dy$.
- Показать, что для $\mu(x)$ справедлива формула

$$\mu(x) = \left(\frac{P(x < T \leq x + \Delta x | T > x)}{\Delta x} \right).$$
- Показать, что для любого возраста $x > 0$ и для любого $z: 0 < z < x$ справедлива формула

$$\mu(x) = \left(\frac{P(x - z < T(z) \leq x - z + \Delta x | T > x)}{\Delta x} \right).$$
- Показать, что $\frac{d}{dx} {}_tp_x = {}_tp_x (\mu_x - \mu_{x+t})$.
- Показать, что T следует экспоненциальному распределению с параметром λ тогда и только тогда, когда $\mu(x) = \lambda$ для всех $x > 0$
- Доказать, что если плотность $f_{T(x)}(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$ возрастает на интервале $0 \leq t \leq 1$, то $q_x > \mu_x$. И наоборот, если ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$ убывает на интервале $0 \leq t \leq 1$, то $q_x < \mu_x$.
- Требуется показать, что
 а)
$$e_x^0 = \frac{1}{S_T(x)} \int_x^\infty S_T(t) dt.$$

 Отсюда доказать, что e_x^0 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} e_x^0 = \mu(x) e_x^0 - 1;$$

 б) $x + e_x 0$ есть возрастающая функция. Дать интерпретацию этого факта

15. Доказать неравенство $l_{x+1} \leq L_x \leq l_x$. Верно ли неравенство $l_{x+t} \leq {}_tL_x \leq t \cdot l_x$, $t > 0$?

16. Показать, что $T_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kL_x$.

17. Показать, что $\frac{dT_x}{dx} = -l_x$.

18. Показать, что $\frac{dL_x}{dx} = -d_x$.

19. Доказать и дать интерпретацию следующих формул:

$$a(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}} = \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x} = \frac{T_x - T_{x+1} - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}}.$$

Вывести отсюда формулу $L_x = a(x)l_x + (1 - a(x))l_{x+1}$.

20. Доказать неравенство $m_x > q_x$.

21. Положим $Y_x = \int_0^{\infty} T_{x+t} dt$. Доказать, что

$$VAR[T(x)] = \frac{2Y_x}{l_x} - \left(\frac{T_x}{l_x}\right)^2.$$

22. Пусть $l_x = ke^{-x}$, $x \geq 0$. Показать, что $m_x = \text{const}$ для всех $x \geq 0$.

23. Показать, что $L_{x+1} = L_x e^{-\int_x^{x+1} m_y dy}$.

24. Пусть принято предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов. Доказать следующие соотношения:

$$m_x = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x}, \quad q_x = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x}.$$

25. Пусть принято предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов. Доказать и объяснить следующее соотношение:

$$m_x = \mu\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

26. Пусть принято предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

27. Пусть принято предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$m_x = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x}.$$

28. Пусть принято предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$T_x = \sum_{y=x}^{\infty} L_y = \frac{1}{2}l_x + \sum_{y=x}^{\infty} l_{y+1}.$$

29. Пусть принято предположение о равномерном распределении смертей для дробных возрастов. Проверить истинность следующих утверждений:

а) $\mu(x+t) = \frac{t \cdot d_x}{l_x - t \cdot d_x}$, при $0 < t < 1$;

б) $\mu(x+t) < \mu(x+s)$, при $0 < t < s < 1$;

в) ${}_s|_u q_{x+t} = \frac{u \cdot q_x}{1-t \cdot q_x}$, при $0 < s+u+t < 1$, $0 < s, u, t < 1$.

30. Пусть принято предположение о постоянной интенсивности смертности для дробных возрастов. Доказать следующие соотношения:

$$m_x = \mu_x, \quad L_x = \frac{d_x}{\mu_x}.$$

31. Пусть принято предположение о постоянной интенсивности смертности для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$a(x) = -\frac{1}{\ln p_x} - \frac{p_x}{q_x}.$$

32. Пусть принято предположение о постоянной интенсивности смертности для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$${}_{t-s}q_{x+s} = 1 - e^{-(t-s)\mu_x}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

33. Пусть принято предположение Балдуччи для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$m_x = -\frac{q_x^2}{p_x \ln p_x}.$$

34. Пусть принято предположение Балдуччи для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$L_x = -\frac{l_{x+1} \ln p_x}{q_x}.$$

35. Пусть принято предположение Балдуччи для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$$a(x) = -\frac{p_x}{q_x^2} (q_x \ln p_x).$$

36. Пусть принято предположение Балдуччи для дробных возрастов. Доказать следующее соотношение:

$${}_{t-s}q_{x+s} = \frac{(t-s)q_x}{1-(1-t)q_x}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s, t \leq 1.$$

Пример контрольной работы

1. Показать, что для любого возраста $x > 0$ и для любого z : $0 < z < x$ справедлива формула

$$\mu(x) = \left(\frac{P(x-z < T(z) \leq x-z+\Delta x | T(z) > x-z)}{\Delta x} \right).$$

Функция распределения продолжительности жизни новорожденного задается формулой:

$$F_T(x) = \begin{cases} \frac{x}{80}, & 0 \leq x \leq 80 \\ 1, & x > 80 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что новорожденный доживет до возраста 30 лет, но умрет до достижения 50 – летнего возраста.

2. Дано $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$, $0 \leq x \leq 100$, $l_0 = 100$. Найти ${}_{.10}L_{20}$, ${}_{.10}d_{20}$,

· $_{10}m_{20}$.

3. . Дано $q_x = 0,16$, сила смертности постоянна внутри каждого года. Найти $t: {}_tp_x = 0,95$.

Работу нужно выполнить на листах формата А4. В работе должен быть описан ход решения с указанием результата на каждом шаге.

7.Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях кафедры «Математика и информатика».

8.Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по данной дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 1.

«Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

8.1.Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, знаний и умений

Код компетенции	Наименование компетенции	Примеры заданий для оценки сформированной компетенции
ПКП-3	Способность применять математический аппарат при разработке вычислительных алгоритмов для решения задач в области экономики и финансов	Страховая компания заключает договоры страхования наземного транспорта. Найдите минимальный страховой тариф с 250 000 руб. страховой суммы, если: – гарантия безопасности равна – 0,98; – вероятность наступления страхового случая – 0,07; – количество договоров – 225; – доля нагрузки в брутто-ставке – 25 %.

8.2.Примеры типовых контрольных заданий

1.Вычислите математическое ожидание современной стоимости аннуитета для человека в возрасте 20 лет, в случае если это:

- полный пожизненный ежегодный аннуитет пренумерандо;
- полный пожизненный ежегодный аннуитет постнумерандо;
- 10-летний ежегодный аннуитет пренумерандо;

- d) 10-летний ежегодный аннуитет постнумерандо;
- e) полный пожизненный ежегодный аннуитет пренумерандо, отсроченный на 10 лет;
- f) полный пожизненный ежегодный аннуитет постнумерандо, отсроченный на 10 лет
- g) полный пожизненный ежегодный аннуитет пренумерандо, с возрастающей выплатой (коэффициент 1).

2. Даны значения коммутационных функций: $D_{20}=15557.436$; $N_{20}=350537.04$; $N_{21}=334979.60$; $N_{30}=219735.21$; $N_{31}=209301.91$; $S_{20}=6578950.1$. Годовая эффективная процентная ставка равна 4%.

3. Вычислите математическое ожидание современной стоимости полного пожизненного аннуитета, выплачиваемого непрерывно, для человека, остаточное время жизни которого характеризуется постоянной интенсивностью смертности, равной 0.05. Сила процента равна 10%.

4. Найдите математическое ожидание современной стоимости 3-летнего аннуитета пренумерандо для 50-летних мужчины и женщины, подпадающих под статистику приложения 1. Годовая эффективная процентная ставка равна 20%.

5. Мужчина в возрасте 40 лет заключает 3-летний договор страхования жизни на сумму 10000, в соответствии с которым премия вносится в начале каждого года равными долями (если страхователь жив). В случае смерти страховое вознаграждение подлежит выплате в конце года. Компания включает в нетто-премию следующие обязательные расходы (п.1.3):

Е) комиссионные страховому агенту, равные 10% от первой выплачиваемой страховой премии и по 5% от последующих (если они поступят), выплачиваемые при получении соответствующих премий;

Г) расходы на подготовку документов, составляющие 100 рублей в момент заключения договора, по 10 рублей - при поступлении каждой из последующих премий, 120 рублей - при выплате вознаграждения;

Г) налоги, равные 10% от каждой поступающей премии;

Н) административные расходы, составляющие 2% от каждой из премий, взимаемые непосредственно при получении премий.

Найдите соответствующие премии, если смертность описывается приложением 1, а годовая эффективная процентная ставка равна 25%.

6. Человек в возрасте 25 лет заключил договор страхования жизни, согласно которому: спустя 30 лет, если он будет жив, то получит три выплаты по 50000 каждая (выплачиваются через год), если скончается раньше, то наследники получают в конце года смерти 100000. Определите величину ежегодной пожизненной премии пренумерандо, которая должна

вноситься 10 лет и в первые 5 лет должна быть в два раза больше, чем в последующие 5 лет.

7. Найти годичную брутто-ставку при страховании жизни от возраста 10 лет на срок 5 лет при страховом пособии 1 200 руб., страховой сумме 2 000 рублей, доле нагрузки 20%, норме доходности 10%.

8. Найти ежемесячную брутто-премию при страховании жизни от

возраста 5 лет на срок 15 лет при страховом пособии 20 000 руб., страховой сумме 25 000 руб., доле нагрузки 25 %, норме доходности 6%.

9. Найти немедленно начинающуюся ежемесячную пенсию от возраста 50 лет на срок 15 лет при единовременном пенсионном взносе 100 000 руб., норме доходности 6 % и доле нагрузки 20 %.

10. Найти величину единовременного пенсионного взноса, гарантирующего немедленную ежегодную пенсию от возраста 55 лет на срок 7 лет в сумме 3 500 руб. при норме доходности 8% и доле нагрузки 15 %.

11. Найти немедленно начинающуюся ежемесячную пожизненную пенсию от возраста 53 года при единовременном пенсионном взносе 15 000 руб., норме доходности 8 % и доле нагрузки 18 %.

12. Найти единовременный рентный взнос, гарантирующий немедленную ежегодную пожизненную ренту от возраста 48 лет в сумме 45 000 руб. при норме доходности 10 % и доле нагрузки 15 %.

13. Найти немедленно начинающуюся ежемесячную пенсию от возраста 52 года на срок 10 лет при единовременном пенсионном взносе 11000 руб., норме доходности 6% и доле нагрузки 19%.

14. Найти единовременный пенсионный взнос, гарантирующий ежемесячную пенсию от возраста 52 года на срок 13 лет в сумме 1000 руб. при норме доходности 10 % и доле нагрузки 20 %.

15. Найти ежемесячную пенсию от возраста 50 лет на срок 15 лет при единовременном взносе в сумме 10 000 руб., внесенном в 35 лет, доле нагрузки 19 %, норме доходности 10 %.

16. Найти ежегодную пенсию от возраста 53 года на срок 12 лет при ежегодном взносе от возраста 45 лет в течение 7 лет суммой 30 000руб., если доля нагрузки 20 %, норма доходности 8 %.

17. Найти единовременный рентный взнос, внесенный в 45 лет и гарантирующий ежегодную ренту от возраста 55 лет на срок 10 лет в размере 100 000 рублей, при норме доходности 10 % и доле нагрузки 20 %.

18. Страховая компания заключает договоры имущественного страхования. Найти страховой тариф с 15 000 руб. страховой суммы, если:

- гарантия безопасности равна – 0,95;
- вероятность наступления страхового случая – 0,03;
- среднее возмещение при наступлении страхового случая – 400 руб.;
- средняя страховая сумма по одному договору – 900 руб.;
- количество договоров – 300;
- среднее квадратическое отклонение от среднего возмещения – 25 руб.;
- доля нагрузки в брутто-ставке – 20 %.

19. Страховая компания заключает договоры имущественного страхования. Найти страховой тариф с 100 000 руб. страховой суммы, если:

- гарантия безопасности равна – 0,9;
- вероятность наступления страхового случая – 0,07;

– среднее возмещение при наступлении страхового случая – 10 000 руб.;

– средняя страховая сумма по одному договору – 15 000 руб.;

– количество договоров – 250;

– доля нагрузки в брутто-ставке – 25 %.

20. Страховая компания заключает договоры страхования наземного транспорта. Найти минимальный страховой тариф с 250 000 руб. страховой суммы, если:

– гарантия безопасности равна – 0,98;

– вероятность наступления страхового случая – 0,07

– количество договоров – 225;

– доля нагрузки в брутто-ставке – 25 %.

21. Страховая компания заключает договоры имущественного страхования. Найти страховой тариф с 135 000 руб. страховой суммы, если:

– гарантия безопасности равна – 0,84;

– вероятность наступления страхового случая – 0,01;

– среднее возмещение при наступлении страхового случая – 375 руб.;

– средняя страховая сумма по одному договору – 1 250 руб.;

– количество договоров – 1 000;

– среднее квадратическое отклонение от среднего возмещения – 37 руб.;

– доля нагрузки в брутто-ставке – 27 %.

22. Страховая компания заключает договоры имущественного страхования. Найти страховой тариф с 96 000 руб. страховой суммы, если:

– гарантия безопасности равна – 0,84;

– вероятность наступления страхового случая – 0,03;

– среднее возмещение при наступлении страхового случая – 325 руб.;

– средняя страховая сумма по одному договору – 12 500 руб.;

– количество договоров – 300;

– доля нагрузки в брутто-ставке – 20 %.

23. Число исков по договору страхования моделируется с помощью случайной величины ξ с законом распределения.

ξ	0	1	2	3	4	5
P_{ξ}	0,35	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05

Найти все квартили и квантиль уровня 0,8.

24. Распределение размера потерь для договора страхования склада от пожара задано таблицей

Размер потерь	Вероятность
0	0,9
500	0,06

1000	0,03
10 000	0,008
50 000	0,001
100 000	0,001

Найти средний размер и вариацию страхового возмещения после пожара.

25. Портфель состоит из 1000 одинаковых договоров страхования. Вероятность предъявления иска одинакова для всех договоров и равна 0,15. Для каждого договора страховая сумма при наступлении страхового случая имеет распределение Парето с параметрами $\alpha=3$, $\theta=100$. Найти ожидаемое значение и дисперсию величины суммарного иска.

26. Вероятность наступления страхового случая равна 0,1. После наступления страхового случая сумма возмещения равна 1000 долл. Исследование показало, что компания может продать полис не более чем за 115 долл. Сколько полисов должна продать компания для того, чтобы она с вероятностью 95% могла выполнить свои обязательства (без учета расходов)? При решении задачи использовать нормальную аппроксимацию.

27. Число страховых случаев за один год имеет геометрическое распределение с параметром q . Выплаты по искам независимы и распределены экспоненциально со средним значением 1. Величина выплат не зависит от числа исков. Найти среднее значение и дисперсию суммарных выплат.

8.3. Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Понятие риска. Оценка риска. Сравнение рисковых альтернатив и функция полезности.
2. Меры Эрроу–Пратта риска.
3. Функции роста. Основные типы функций роста. Приведенная функция роста.
4. Схемы начисления процентов. Начисление простых и сложных процентов.
5. Процентные и учетные ставки. Простые годовые ставки. Номинальные и эффективные ставки. Непрерывные ставки.
6. Эквивалентность процентных и учетных ставок.
7. Потоки платежей. Алгебра потоков. Приведение и эквивалентность оттоков платежей.
8. Ренты. Будущие и текущие стоимости рент. Бессрочные ренты.
9. Кратные ренты. Непрерывные ренты. Стоимости непрерывных рент.
10. Монотонные (возрастающие и убывающие) ренты. Арифметические и геометрические ренты.
11. Функции дожития и вероятности демографических событий. Теоретические законы смертности (Моавра, Гомперца, Мейкема).

12. Таблицы смертности и ее показатели. Принципы построения таблиц смертности. Примеры расчетов.
13. Интерполяция таблиц смертности для дробных возрастов.
14. Общие декрементные таблицы. Таблицы заболеваемости.
15. Основные виды страхования жизни. Страхование на случай смерти, дожития и смешанное.
16. Страхование рент. Срочная и пожизненная страховые ренты. Отложенные ренты.
17. Приведенная пожизненная рента. Отложенная пожизненная рента.
18. Единовременная премия на чистое дожитие. Коммутационные числа.
19. Единовременная премия страхования жизни на срок.
20. Страхование жизни с ограниченным сроком выплат.
21. Единовременная премия по смешанному страхованию жизни.
22. Стоимость страховой пожизненной ренты. Стоимость отложенной страховой пожизненной ренты.
23. Стоимость срочной страховой ренты.
24. Периодическая премия пожизненного страхования.
25. Связь между актуарными оценками страховых рент и страховых полисов.
26. Понятие о резерве премий. Принципы расчета страхового резерва.
27. Рекуррентные формулы для резервов. Формула Феклера.
28. Монотонные страховые ренты.
29. Общая схема страхования жизни. Принцип расчета стоимости страхового контракта.
30. Специальные виды контрактов, часто встречающиеся в практике страхования жизни.
31. Контракты с точным временем выплат. Непрерывные модели страховых контрактов.
32. Базовые типы пенсионных схем.
33. Индивидуальные пенсионные схемы.
34. Страховые пенсионные схемы.
35. Модель индивидуального риска.
36. Аппроксимация сложных распределений.
37. Модель коллективного риска.
38. Рекуррентное соотношение Панджера.
39. Параметрические распределения величины ущерба.
40. Процесс Крамера-Лундберга.
41. Неравенство Лундберга.
42. Аппроксимация Крамера-Лундберга.
43. Динамические модели разорения.
44. Аппроксимация вероятности разорения.
45. Полная и частичная достоверность.

8.4.Пример экзаменационного билета

1. Пусть T экспоненциально распределена с параметром 0,05. 35-летний мужчина заключает договор страхования жизни на 25 лет. Условия договора таковы: страховая выплата в размере 1 осуществляется в момент смерти застрахованного, эффективная годовая процентная ставка равна 10%. Найти актуарную стоимость этого договора и вариацию текущей стоимости страховой суммы.

2. Размер страхового возмещения для определенного вида несчастных случаев является случайной величиной с производящей функцией моментов

$$\psi(t) = e^{t+8t^2}.$$

Найти коэффициент асимметрии размера страхового возмещения.

3. Суммарная величина выплат имеет составное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 0,8$. Величина индивидуальных выплат имеет распределение

Величина выплат	Вероятность
1	0,25
2	0,375
3	0,375

Найти вероятности $P[S=a]$ при $a=0$ и $a=3$.

4. Величина ущерба при пожаре (в случае если он произошел) имеет экспоненциальное распределение со средним значением 2000 руб. Страховая компания установила верхний предел своей ответственности 5000 руб. Найти средний размер выплат компании по одному страховому случаю. Найти распределение величины страховой выплаты. Найти вероятность того, что страховая выплата составит 5000.

9.Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) Основная:

1. Аль-Натор, М.С. Актуарная математика: модели дожития, страхование жизни и страховые аннуитеты. Ч. 1 = Actuarial mathematics: survival models, life insurance and annuities. Р.1: Учебное пособие / М.С. Аль-Натор, С.В. Аль-Натор, Ю.Ф. Касимов; Финуниверситет, Каф. прикладной математики. - Москва: Финуниверситет, 2019. - 112 с.- Текст: непосредственный. -То же. – ЭБ Финуниверситета. - URL: <http://elib.fa.ru/rbook/al-nator.pdf>. (дата обращения: 04.02.2023) - Текст: электронный.

2. Касимов, Ю.Ф. Основы финансовых вычислений. Основные схемы расчета финансовых сделок: учебник / Ю.Ф. Касимов, М.С. Аль-Натор, А.Н. Колесников; Финуниверситет. - Москва: Кнорус, 2019. - 328 с. – Текст:

непосредственный. - То же. — ЭБС BOOK.ru. - URL: <https://www.book.ru/book/921653> (дата обращения: 04.02.2023). - Текст: электронный.

3. Borowiak, Dale S. Financial and Actuarial Statistics an Introduction / Dale S. Borowiak, Arnold F. Shapiro - Boca Raton (USA): CRC Press, 2019 - 383p.— URL: <http://lpvserver190/fulltext/bookfree/Borowiak.pdf>. (дата обращения: 04.02.2023) – Текст: электронный.

б) Дополнительная:

4. Королев, В.Ю. Математические основы теории риска / В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Физматлит, 2020. — 620 с. — ЭБС ZNANIUM.com. — URL: <https://new.znanium.com/catalog/product/309094> (дата обращения: 04.02.2023)- Текст : электронный

5. Фалин, Г.И. Актуарная математика в задачах / Г.И.Фалин, А.И.Фалин - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2021 - 192с.-Текст непосредственный.- То же.- ЭБС ZNANIUM.com. - URL: <https://new.znanium.com/catalog/product/544616> (дата обращения: 03.02.2023).-Текст : электронный

6. Klugman, Stuart A. Loss Models: From Data to Decisions / Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot. - Hoboken: Wiley Interscience, 2020. - 762 p. - URL: <http://lpvserver190/fulltext/bookfree/Krugman.pdf>. (дата обращения: 04.02.2023). - Текст: электронный

10.Перечень ресурсов информационно телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации <http://portal.ufrf.ru/>

2. Сайт департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий.

3. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/> (<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)

4. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/> (<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)

5. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>

6. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>

7. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>

8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» <https://e.lanbook.com/>

9. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://www.biblio-online.ru/>

10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>

11.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов проходит аудиторно и внеаудиторно. Организации самостоятельной работы служит учебно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций, практических занятий, вопросы и задания для самостоятельного изучения.

Домашние задания следует выполнять регулярно при подготовке к практическим занятиям. Контроль выполнения домашних заданий осуществляется в ходе практических занятий в процессе выборочного собеседования.

12.Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения: Windows, Microsoft Office; Антивирус ESET Endpoint Security.

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

Информационно-правовая система «Консультант Плюс»;

Информационно-правовая система «Гарант»;

Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>

Система комплексного раскрытия информации «СКРИН»
<http://www.skrin.ru>

11.3.Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации – не предусмотрено

11.4.Эконометрический пакет R и интерфейс RStudio или другие системы компьютерной математики (например, MAXIMA или Wolfram A).

13.Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Аудитории для проведения занятий.